

## 0.1 Hopf invariant

### Proposition 0.1.1

$\psi^k : \tilde{K}(S^{2n}) \longrightarrow \tilde{K}(S^{2n})$  において、 $\psi^k(x) = k^n x$  である。

proof)  $n = 1$  のとき、 $\psi^k : \tilde{K}(S^2) \longrightarrow \tilde{K}(S^2)$  を考える。 $\tilde{K}(S^2)$  の生成元  $\alpha = \gamma - 1$  について示せば十分である。ここで  $\gamma$  は canonical line bundle で、 $1$  は trivial line bundle である。 $\alpha^2 = 0$  であったことも思い出せば、

$$\psi^k(\alpha) = \psi^k(\gamma - 1) = \psi^k(\gamma) - \psi^k(1) = \gamma^k - 1 = (\alpha + 1)^k - 1 = 1 + k\alpha - 1 = k\alpha$$

である。よって、 $n = 1$  のときは成立し、以下帰納法を用いる。 $n - 1$  まで題意が成り立ったとする。 $\tilde{K}(S^{2n}) \cong \mathbf{Z}$  の生成元は  $a$  の  $n$  個の external product  $a * a * \cdots * a$  である。これを  $a_n$  とおくと、 $a_n = a * a_{n-1}$  である。また、Adams operation の自然性と環の準同型性から external product と可換になる。よって、帰納法の仮定とも合わせると、

$$\psi^k(a_n) = \psi^k(a * a_{n-1}) = \psi^k(a) * \psi^k(a_{n-1}) = ka * k^{n-1}a_{n-1} = k^n a_n$$

であり題意が示される。

### Lemma 0.1.2

$A$  をアーベル群とし、

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

が完全とする。このとき、 $f(1) = \alpha$  とおくと、 $n \in \mathbf{Z}$  に対し、 $n\alpha \equiv 0 \pmod{m}$  ( $m \in \mathbf{N}$ ) ならば、 $n \equiv 0 \pmod{m}$  である。

proof) 仮定より  $b \in B$  により  $n\alpha = mb$  と表せる。このとき、

$$g(n\alpha) = ng(\alpha) = ng \circ f(\alpha) = 0$$

であるので、 $mg(b) = g(mb) = 0$  である。つまり  $g(b) = 0$  であるので、 $c \in \mathbf{Z}$  が存在し、 $f(c) = b$  である。よって、 $n\alpha = mb$  を書き直すと、 $f(n) = f(mc)$  であり、 $f$  が単射なので  $n = mc$  でありつまり、 $n \equiv 0 \pmod{m}$

**Definition 0.1.3** (*Hopf invariant*)

連続写像  $f : S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$  を考える。このとき、cofiber sequence

$$S^{2n} \xrightarrow{i} C_f \xrightarrow{p} S^{4n}$$

を考えると、ここから長い cohomology exact sequence ができるが、 $\tilde{K}^1(S^{2n}) = \tilde{K}^1(S^{4n}) = 0$  なので、

$$0 \rightarrow \tilde{K}(S^{4n}) \xrightarrow{p^*} \tilde{K}(C_f) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(S^{2n}) \rightarrow 0$$

の短完全列ができる。このとき、 $i_{4n} \in \tilde{K}(S^{4n})$ ,  $i_{2n} \in \tilde{K}(S^{2n})$  をそれぞれの生成元とする。これらは  $i_{2n}^2 = i_{4n}^2 = 0$  という性質がある。このとき、 $p^*(i_{4n}) = \alpha$  とし、 $i^*$  が全射であるので、 $i^*(\beta) = i_{2n}$  となるような  $\alpha, \beta \in \tilde{K}(C_f)$  を選ぶ。ただし、 $\beta$  は一意には決まらないが、 $\beta^2$  は mod 2 で一意である。つまり、 $\beta, \gamma \in \tilde{K}(C_f)$  に対し、 $i^*(\beta) = i^*(\gamma) = i_{2n}$  とすると、 $\beta - \gamma \in \text{Ker } i^* = \text{Imp}^*$  なので、 $m \in \mathbb{Z}$  によって  $\beta - \gamma = m\alpha$  とあらわせる。このとき、

$$\beta^2 - \gamma^2 = \beta^2 - (\beta - m\alpha)^2 = 2m\beta\alpha \equiv 0 \pmod{2}$$

よって、 $i^*(\beta^2) = 0$  であるので、 $\exists x \in \tilde{K}(S^{2n})$  s.t.  $p^*(x) = \beta^2$   $p^*$  が単射なのでこのような  $x$  は  $\beta$  にたいして一意に定まる。また、 $x = ti_{2n}$  となる  $t$  も mod 2 で一意に決まり、その結果、 $\beta^2 \equiv t\alpha \pmod{2}$  となる。この  $t \in \mathbb{Z}_2$  は  $f$  の homotopy 類にのみ依存するので、 $H(f)$  と書き  $f$  の mod 2 Hopf invariant と呼ぶ。この Hopf invariant では偶数が奇数かしかないが、特異 cohomology を用いた定義では符合を除いて Hopf invariant を定義する事ができる。

**Theorem 0.1.4**

$H(f)$  が奇数ならば、 $n = 1, 2, 4$  である。

proof)  $f : S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$  に対し、 $H(f)$  が奇数とする。  $\alpha = H(f)\beta^2$  である。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(S^{4n}) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{K}(C_f) \\ \psi^k \downarrow & & \downarrow \psi^k \\ \tilde{K}(S^{4n}) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{K}(C_f) \end{array}$$

の可換図を考える。Prop 0.1.1 により、

$$\psi^k(\alpha) = \psi \circ p^*(i_{4n}) = p^* \circ \psi^k(i_{4n}) = p^*(k^{2n}i_{4n}) = k^{2n}\alpha$$

である。また、同じように

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(C_f) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{K}(S^{2n}) \\ \psi^k \downarrow & & \downarrow \psi^k \\ \tilde{K}(C_f) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{K}(S^{2n}) \end{array}$$

の図式を考えれば、

$$i^*(\psi^k(\beta)) = \psi^k(i^*(\beta)) = \psi^k(i_{2n}) = k^n(i_{2n}) = k^n(i^*(\beta)) = i^*(k^{2n}\beta)$$

よって、 $i^*(\psi^k(\beta) - k^{2n}\beta) = 0$  である。完全列から、 $m_k\alpha = \psi^k(\beta) - k^{2n}\beta$  となる  $m_k \in \mathbb{Z}$  が存在する。よって、

$$\psi^k(\beta) = m_k\alpha + k^{2n}\beta$$

である。このとき、 $\psi^k \circ \psi^l = \psi^l \circ \psi^k$  であったので、

$$\begin{aligned} \psi^k \circ \psi^l(\beta) &= \psi^k(l^n\beta + t_l\alpha) \\ &= l^n\psi^k(\beta) + t_l\psi^k(\alpha) \\ &= l^n(k^n\beta + t_k\alpha) + t_lk^{2n}\alpha \\ &= (lk)^n\beta + (l^n t_k + t_l k^{2n})\alpha \end{aligned}$$

一方で、 $\psi^l \circ \psi^k(\beta) = (kl)^n\beta + (k^n t_l + t_k l^{2n})\alpha$  であるので、

$$(k^n t_l + l^{2n} t_k)\alpha = (l^n t_k + k^{2n} t_l)\alpha$$

が成り立ち、 $\alpha = p^*(i_{4n})$  であったことと、 $p^*$  が単射ということより係数が等しく、

$$k^n t_l + l^{2n} t_k = l^n t_k + k^{2n} t_l$$

である。ここで、 $k = 2, l = 3$  で考えると

$$2^n t_3 + 3^{2n} t_2 = 3^n t_2 + 2^{2n} t_3$$

である。このとき、 $\psi^2(\beta) \equiv \beta^2 \pmod{2}$ であったので、 $\psi^2(\beta) - \beta^2 = 2x$ となる  
 $x \in \tilde{K}(C_f)$ が存在する。つまり、

$$2^n \beta + t_2 \alpha - \beta^2 = 2x$$

であり、 $\beta^2 = H(f)\alpha$ であったので、

$$2^n \beta + t_2 \alpha - H(f)\alpha = 2x$$

つまり、 $(t_2 - H(f))\alpha = 2x - 2^n \beta$ ということは、 $(t_2 - H(f))\alpha \equiv 0 \pmod{2}$

Lemma 0.1.2により、 $(t_2 - H(f)) \equiv 0 \pmod{2}$ である。ということは、 $t_2 - H(f)$   
 は偶数。ところで仮定より  $H(f)$  が奇数だから、 $t_2$  も奇数である。ここで、

$$2^n t_3 + 3^{2n} t_2 = 3^n t_2 + 2^{2n} t_3$$

に立ち戻ると、 $(3^{2n} - 3^n)t_2 = (2^{2n} - 2^n)t_3$  であるが、 $3^n(3^n - 1)t_2 = 2^n(2^n - 1)t_3$   
 であり、

$$\frac{3^n(3^n - 1)t_2}{2^n} = (2^n - 1)t_3 \in \mathbf{Z}$$

であるが、ここで、 $3^n, t_2$  は奇数なので、 $2^n$  で割り切れることは無い。ということは、

$$\frac{3^n - 1}{2^n} \in \mathbf{Z}$$

となるわけだが、これは整数論から  $n = 1, 2, 4$  という結論を得る。

### Definition 0.1.5

$f : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  に対し、 $\hat{f} : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  を次のように定義する。

$$S^{2n-1} = \partial(D^{2n}) = \partial(D^n \times D^n) = \partial D^n \times D^n \cup D^n \times \partial D^n = S^{n-1} \times D^n \cup D^n \times S^{n-1}$$

と見て、 $S^n = D_+^n \cup D_-^n$  と見なす。このとき、

$$\hat{f}_+ : \partial D^n \times D^n \rightarrow D_+^n, \quad \hat{f}_- : D^n \times \partial D^n \rightarrow D_-^n$$

を  $\hat{f}_+(x, y) = |y|f(x, y/|y|)$ ,  $\hat{f}_-(x, y) = |x|f(x/|x|, y)$  により定義する。ただし、  
 $\hat{f}_+(x, 0) = \hat{f}_-(0, y) = 0$  とする。これにより  $\hat{f}_+, \hat{f}_-$  は連続で、共通部分を考えて、  
 $\partial D^n \times D^n \cap D^n \times \partial D^n = S^{n-1} \times S^{n-1}$  であるので、 $(x, y) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$  に対して  
 は、 $\hat{f}_+(x, y) = \hat{f}_-(x, y) = f(x, y)$  であるので、

$$\hat{f} = \hat{f}_+ \cup \hat{f}_- : S^{2n-1} \rightarrow S^n$$

が連続となる。

**Proposition 0.1.6**

$f : S^{2n-1} \times S^{2n-1} \longrightarrow S^{2n-1}$  が H-space multiplication ならば、 $\hat{f} : S^{4n-1} \longrightarrow S^{2n}$  の Hopf invariant である  $H(\hat{f}) = \pm 1$  である。

**Theorem 0.1.7** (*Hopf invariant one* の元の非存在)

$n > 0$  に対し、 $S^n$  が H-space ならば、それは  $n = 1, 3, 7$  に限る。

proof)  $S^n$  が H-space ならば  $n$  が奇数であることは知られていた。よって、 $n = 2m - 1$  として考えると、この H-space multiplication から誘導される写像  $S^{4m-1} \longrightarrow S^{2m}$  の Hopf invariant は Prop 0.1.6 により奇数である。よって、Theorem 0.1.4 により、 $m = 1, 2, 4$  であるので、 $n = 1, 3, 7$  である。